

I-5. Existencia y cálculo de límites.

- Para analizar la no existencia de límite es muy útil el concepto de límite a lo largo de una curva.

Def [Límite a lo largo de una curva].

- sea $f(x)$ una función escalar de n variables reales, y sea " a " un punto de acumulación de $\mathcal{D}(f)$. Sea $\phi(t)$ una curva continua en \mathbb{R}^n ($\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$), tal que $\phi(0) = a$ y $\exists r > 0$ tal que la imagen de $B_r'(0) = (-r, 0) \cup (0, r)$ está contenida en $\mathcal{D}(f)$, es decir $\phi(B_r'(0)) \subset \mathcal{D}(f)$. Entonces llamamos



límite de la función $f(x)$ en el punto " a " a lo largo de la curva $\phi(t)$, al límite

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \phi(t)}} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(\phi(t))$$

es decir al límite de la función de una variable $g(t) = f(\phi(t))$ que obtenemos considerando los valores que la función f toma sobre la curva $\phi(t)$.

- En caso de que solamente $\phi(0, r)$ ($\phi((-r, 0))$) esté contenido en el dominio de $f(x)$, podemos definir el límite de $f(x)$ a lo largo de la curva $\phi(t)$ como $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\phi(t))$ ($\lim_{t \rightarrow 0^-} f(\phi(t))$).

- De la definición de límite de una función a lo largo de una curva, se sigue que si $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, entonces también existe el límite de $f(x)$ en el punto " a ", a lo largo de cualquier curva continua $\phi(t)$ que

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

... como límite el mismo valor b , utilizando

este resultado, se puede demostrar la no existencia del límite de una función dada $f(x)$ en un punto "a". Basta mostrar dos curvas continuas $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ a lo largo de las cuales el límite de la función $f(x)$ en el punto "a", da dos valores distintos b_1 y b_2 , para probar que el límite no existe.

Ejemplo 1:

- Consideremos la función $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ y estudiemos la existencia del límite en el punto $(0,0)$. Tomando límite a lo largo de las rectas $y = mx$ resulta

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+mx}{x-mx} = \frac{1+m}{1-m}$$

Entonces como el resultado depende de m , es decir de la recta por la que nos acercamos al punto $(0,0)$, podemos concluir que $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

Ejemplo 2:

- Consideremos la función $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Los límites de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$ a lo largo de todas las rectas $y = mx$, coinciden ya que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{x^2 + m^2} x = 0$$

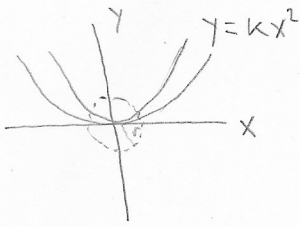
Los límites a lo largo de los ejes coordenados $y=0$, y $x=0$, también se anulan, ya que la función se anula sobre dichos ejes. Sin embargo, el límite a

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$(x,y) \rightarrow (0,0)$



Es clarificador observar que las parábolas $y = kx^2$ son curvas de nivel de la función f , sobre las cuales la función toma el valor constante $c = \frac{k}{1+k^2}$. Todas ellas pasan por

el origen de coordenadas $(0,0)$, y esto implica que en cualquier bola abierta $B_r((0,0))$ centrada en $(0,0)$, la función puede tomar una infinidad de valores, y esta es la razón por la que no existe el límite en $(0,0)$.

- Este último ejemplo nos muestra que aunque los límites de una función $f(x)$ a lo largo de todas las rectas que pasan por el punto "a" existen y coinciden, puede no existir el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, porque pueden existir otras curvas que pasan por "a", a lo largo de las cuales el límite no existe o es diferente del obtenido a lo largo de rectas.

Esto nos enseña que calculando el límite a lo largo de curvas podemos comprobar que el límite de una cierta función no existe, pero nunca podemos asegurar por este procedimiento la existencia de un límite. Aquí radica una de las diferencias cruciales entre el cálculo en una y en varias variables. Para los límites en una variable solo hay dos maneras de acercarse al punto donde se toma límite: por la derecha y por la izquierda; y si de ambas maneras se obtiene la misma respuesta, entonces el límite existe. Por contra, para los límites simultáneos en varias variables (límite doble, triple, etc...) hay infinitas maneras de acercarse al punto donde se toma límite. Si el límite existe

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

Cálculo de límites para las funciones de varias variables

- Por lo que acabamos de ver, el cálculo de límites múltiples puede resultar difícil, sobre todo por lo que respecta a determinar con certeza que el límite múltiple existe. Ahora, las funciones de ^{varias} variables que intervienen se expresan como combinaciones de funciones de una variable, y esto nos permite utilizar los resultados del cálculo en una variable. Recordemos en primer lugar el concepto de infinitésimo

Def [Infinitésimo]

- Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de una variable real ($f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), con $g(x) > 0$, se dice que f es un infinitésimo de g en $x=a$, y se escribe en la forma $f = o(g)$ si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- Es fácil comprobar que se cumplen las siguientes propiedades

$$i) f_1 = o(g_1) \text{ y } f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$$

$$ii) f_1 = o(g_1) \text{ y } f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$$

- Es importante entender lo que significa la notación $f = o(g)$. Cuando escribimos $f = o(g)$ queremos decir que f es una función, que puede ser desconocida, pero que si la dividimos por g

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teorema [Taylor en una variable]

- Si la función de una variable real $f(x)$ admite p derivadas continuas en un intervalo abierto (x_0-r, x_0+r) alrededor del punto x_0 , $\forall h \in (-r, r)$ se cumple la fórmula de Taylor con resto

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!} f^{(p-1)}(x_0) h^{p-1} + R_p(f; x_0, h)$$

donde

$$R_p(f; x_0, h) = \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0 + zh) h^p \quad (0 < z < 1)$$

es el resto de Lagrange de orden " p ", para la función f , en el punto x_0 y para un incremento h de la variable. (Debido a que la derivada de orden " p " es continua por hipótesis, se tiene

$$R_p(f; x_0, h) = \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0) h^p + o(|h|^p)$$

y por tanto para una función de clase C^p , es decir con p derivadas continuas, podemos escribir

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \dots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0) h^p + o(|h|^p)$$

y este es el resultado que utilizaremos para el cálculo de límites.

Ejemplo 3:

Consideremos la función de dos variables

$$g(x, y) = e^{xy} - \alpha - \beta xy$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

• Para $\gamma \neq 0 \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - \alpha - \beta xy}{\gamma + \sin x \sin y} = \frac{1-\alpha}{\gamma}$,

y la función $g(x,y)$ es continua si definimos $g(0,0) = \frac{1-\alpha}{\gamma}$.

• Ahora si $\gamma = 0$, para que pueda existir el límite doble ha de ser $\alpha = 1$, en cuyo caso tenemos una indeterminación en la forma $0/0$.

Para resolverla utilizamos la fórmula de Taylor

$$e^u = 1 + u + o(|u|) \quad \text{y} \quad \sin u = u + o(|u|),$$

y substituyendo en el límite, obtenemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - \alpha - \beta xy}{\sin x \sin y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(1-\beta) + o(|xy|)}{xy + x o(|y|) + y o(|x|) + o(|x|) o(|y|)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\beta + \frac{o(|xy|)}{xy}}{1 + \frac{o(|y|)}{y} + \frac{o(|x|)}{x} + \frac{o(|x|) o(|y|)}{xy}} = 1-\beta.$$

Entonces, cuando $\gamma = 0$ y $\alpha = 1$, la función es continua si definimos $g(0,0) = 1-\beta$.

• Notemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(|x|)}{x} = 0$, ya que

$$\frac{o(|x|)}{x} = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{o(|x|)}{|x|} \quad \text{y} \quad \left| \frac{|x|}{x} \right| \leq 1$$

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Ejemplo 4:

Estudiamos la existencia y el valor del límite doble

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{x^{\operatorname{sen} y} - 1}{a(x-1) + b(y - \frac{\pi}{2})}$$

en función de los parámetros a y b . Utilizando de nuevo $e^u = 1 + u + o(|u|)$, resulta

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{x^{\operatorname{sen} y} - 1}{a(x-1) + b(y - \frac{\pi}{2})} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{e^{\operatorname{sen} y \ln x} - 1}{a(x-1) + b(y - \frac{\pi}{2})} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{\operatorname{sen} y \ln x + o(|\operatorname{sen} y \ln x|)}{a(x-1) + b(y - \frac{\pi}{2})} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{1 + \frac{o(|\operatorname{sen} y \ln x|)}{\operatorname{sen} y \ln x}}{a(x-1) + b(y - \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

Ahora, en la última fracción el límite del numerador es 1, y para el denominador, tomando límite a lo largo de las rectas

$$y - \frac{\pi}{2} = m(x-1), \text{ resulta}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{\operatorname{sen} y \ln x}{a(x-1) + b(y - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + m(x-1)) \ln(1+x-1)}{(a+bm)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+o(|x-1|))(x-1+o(|x-1|))}{(a+bm)(x-1)} = \frac{1}{a+bm}$$

que depende de la dirección si $b \neq 0$. Entonces si $b \neq 0$, el

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{-1}{a(x-1)} = \frac{1}{a}$$

• Cuando se analizan los límites para funciones de dos variables, a veces se utilizan coordenadas polares, sobre todo cuando la función $f(x,y)$ factoriza en la forma $f(x,y) = g(r)h(\theta)$. Pero hay que tener cuidado: si $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$, y $h(\theta)$ es una función acotada, en virtud del lema 3 se puede asegurar que $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x,y) = 0$, pero si $h(\theta)$ no es una función acotada, no se puede asegurar la existencia del límite doble. Vemos un par de ejemplos:

Ejemplo 5:

Para $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = r \cos^2 \theta \sin \theta$ puede asegurarse que

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{porque} \quad |\cos^2 \theta \sin \theta| \leq 1$$

Nota: no hace falta pasar a polares para verlo.

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{\overset{\leq 1}{x^2}}{\overset{\leq 1}{x^2 + y^2}} \cdot \underset{\rightarrow 0}{y} \rightarrow 0$$

$(x,y) \rightarrow (0,0)$

Ejemplo 6:

Para $f(x,y) = \frac{x^2}{y} = r \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$ aunque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} r = 0$,

$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{y}$, como puede verse tomando límite a lo largo de las

parábolas $y = ax^2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70